

Die Ebene im Raum – parameterfreie Darstellung/Normalvektorform

Lösungsblatt 1

Die Parameterdarstellung einer Ebene im Raum lautet: $\mathbf{X} = \mathbf{A} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Die parameterfreie Darstellung (= Normalvektordarstellung) einer Ebene im Raum lautet: $ax+by+cz = d$

Stellen Sie die gegebene Parameterdarstellung der Ebene ε in parameterfreier Form dar!

$$\varepsilon: \mathbf{X} = \begin{pmatrix} +1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +3 \\ +11 \\ +3 \end{pmatrix}$$

1. Mit Hilfe des Vektorprodukts der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird der Normalvektor der Ebene ε bestimmt!

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} +3 & +2 \\ +2 & +11 \\ 0 & +3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +3 & +11 \\ +11 & +3 \end{vmatrix}; \quad n_x = \begin{vmatrix} +2 & +11 \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = (+6 - 0) = +6; \quad n_y = - \begin{vmatrix} +3 & +3 \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = - (+9 - 0) = -9;$$

$$n_z = \begin{vmatrix} +3 & +3 \\ +2 & +11 \end{vmatrix} = (+33 - 6) = +27;$$

2. Parameterfreie Form $\rightarrow$ Normalvektorform der Ebene ε :

$$\varepsilon: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} = d$$

$$+6 \cdot x - 9 \cdot y + 27 \cdot z = d \quad \rightarrow \quad 3. \text{ Die Koordinaten des Punktes A einsetzen!}$$

$$+6 \cdot 1 - 9 \cdot (-4) + 27 \cdot 0 = d \quad \rightarrow \quad \underline{d = +42} \quad \rightarrow \quad \underline{\varepsilon: 6x - 9y + 27z = +42}$$

Normalvektorform / parameterfreie Form

Ebenso:

$$\varepsilon: \mathbf{X} = \begin{pmatrix} +4 \\ -6 \\ +2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ +4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} -2 & +2 \\ 0 & +4 \\ +4 & -2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +2 & +4 \\ +4 & -2 \end{vmatrix}; \quad n_x = \begin{vmatrix} 0 & +4 \\ +4 & -2 \end{vmatrix} = (0 - 16) = -16; \quad n_y = - \begin{vmatrix} -2 & +2 \\ +4 & -2 \end{vmatrix} = - (+4 - 8) = +4;$$

$$n_z = \begin{vmatrix} -2 & +2 \\ 0 & +4 \end{vmatrix} = (-8 - 0) = -8;$$

$$\varepsilon: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} = d$$

$$-16 \cdot x + 4 \cdot y - 8 \cdot z = d$$

$$-16 \cdot 4 + 4 \cdot (-6) - 8 \cdot 2 = d \quad \rightarrow \quad \underline{d = -104} \quad \rightarrow \quad \underline{\varepsilon: -16x + 4y - 8z = -104}$$

Ebenso:

$$\varepsilon: \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ +5 \\ +3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} +6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} +6 & -2 \\ -4 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}; \quad n_x = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (+16 - 2) = +14; \quad n_y = - \begin{vmatrix} +6 & +4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = - (-24 - 4) = +28;$$

$$n_z = \begin{vmatrix} +6 & +4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-12 + 16) = +4;$$

$$\varepsilon: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} = d$$

$$+14 \cdot x + 28 \cdot y + 4 \cdot z = d$$

$$+14 \cdot (-2) + 28 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = d \quad \rightarrow \quad \underline{d = +124} \quad \rightarrow \quad \underline{\varepsilon: 14x + 28y + 4z = +124}$$