Funktionen – Anwendung der Integralrechnen – Volumen von Rotationskörpern

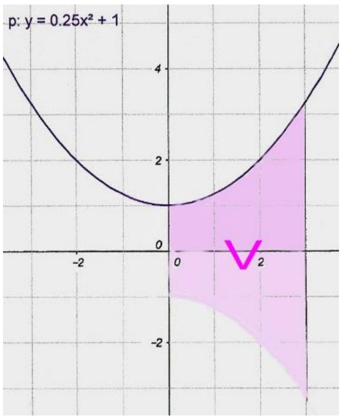
Lösungsblatt 1

Die allgemeinen Formeln für die Berechnung des Volumens von Rotationskörpern lauten:

Rotation um die x-Achse: $V_x = \pi \,.\int_a^b f^2(x)\,.\,dx \;\rightarrow\; V_x = \pi \,.\int_a^b y^2\,.\,dx$

Rotation um die y-Achse: $V_y = \pi \,.\int_a^b f^2(y)\,.\,dy \;\rightarrow\; V_y = \pi \,.\int_a^b x^2\,.\,dy$

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der von der Funktion f(x): $y = \frac{1}{4}\,.\,x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall (a = 0;b = +3) gebildet wird! → Rotation um die x-Achse!



$V_x = \pi\,.\int_a^b y^2\,.\,dx \;\rightarrow\; y = \frac{1}{4}\,.\,x^2 + 1$

$\rightarrow\; y^2 = (\frac{1}{4}\,x^2 + 1)^2 = \frac{1}{16}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^2 + 1$

$V_x = \pi\,.\int_0^{+3} (\frac{1}{16}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^2 + 1)\,.\,dx =$

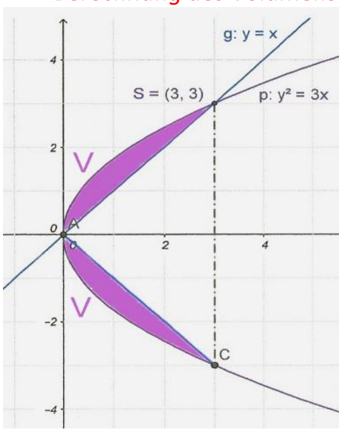
$= \pi\,.\,(\frac{1}{16\,.\,5}\,x^5 + \frac{1}{2\,.\,3}\,x^3 + x)\Big|_0^{+3} = \pi\,.\,(\frac{1}{80}\,x^5 + \frac{1}{6}\,x^3 + x)\Big|_0^{+3}$

$= \pi\,.\,[(\frac{243}{80} + \frac{9}{2} + 3) - 0] = \pi\,.\,(\frac{243}{80} + \frac{360}{80} + \frac{240}{80}) = \pi\,.\,\frac{843}{80}$

$V_x = 33{,}10$ VE *(→ Volumeneinheiten)*

Berechnen Sie das Volumen des Flächenstücks, das von der Funktion f(x): $y^2 = 3x$ und der Geraden g(x): $y = x$ eingeschlossen wird und um die x-Achse rotiert!

1.Schritt: die Schnittpunkte berechnen
2.Schritt: Berechnung des Volumens



$f(x) \cap g(x)$: $y^2 = 3x \;\rightarrow\; y = x$

$x^2 = 3x \;\rightarrow\; x^2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x\,.\,(x-3) = 0;$

$\mathbf{x_1 = 0;\ x_2 = +3;}$ **Intervall: (0;+3)**

$V = V_{1(Parabel)} - V_{2(Gerade)}$

$V_1 = \pi\,.\int_a^b y^2\,.\,dx = \pi\,.\int_0^{+3} 3x\,.\,dx = \pi\,.\,\frac{3}{2}x^2\Big|_0^{+3} =$

$V_1 = \pi\,.\,(\frac{27}{2} - 0) = \boldsymbol{\pi\,.\,13{,}5}$

$V_2 = \pi\,.\int_a^b y^2\,.\,dx = \pi\,.\int_0^{+3} x^2\,.\,dx = \pi\,.\,\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{+3} =$

$V_2 = \pi\,.\,(9 - 0) = \boldsymbol{\pi\,.\,9}$

$V = V_1 - V_2 = \pi\,.\,(13{,}5 - 9) = 4{,}5\,.\,\pi = 14{,}13$ VE