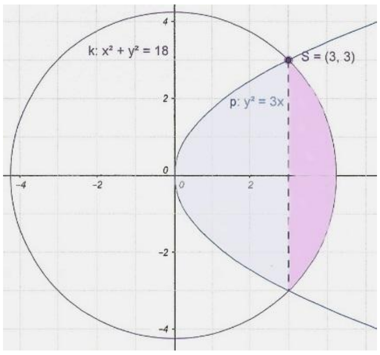
Funktionen – Anwendung der Integralrechnen – Volumen von Rotationskörpern

Lösungsblatt 3

Der Kreis schneidet von der Parabel ein Flächenstück ab. Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers!

V_1 = Rotation der Parabel im Intervall (0; x_s)
V_2 = Rotation des Kreises im Intervall (x_s; r)



k: $x^2 + y^2 = 18$; p: $y^2 = 3x$;

k: $\rightarrow\ y^2 = 18 - x^2 \quad r = \sqrt{18} = 4{,}24$

$\rightarrow\ k \cap p$: $x^2 + y^2 = 18$; $\rightarrow\ y^2 = 3x$;

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{72}{4}} \rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$

$x_1 = +3$; $[x_2 = -6]$

Da die Parabel in der 1. Hauptlage gegeben ist, ist die negative Lösung x_2 nicht möglich! → siehe Skizze!

$V = V_1 + V_2$

$V_1 = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^{+3} 3x \cdot dx = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{+3} =$

$= \pi \cdot \left(\frac{27}{2} - 0\right) = \underline{13{,}3 \cdot \pi}$

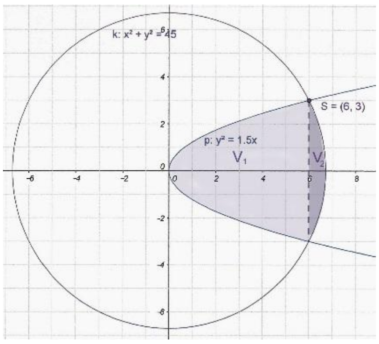
$V_2 = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{+3}^{+4{,}24} (18 - x^2) \cdot dx =$

$= \pi \cdot \left(18x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{+3}^{+4{,}24} = \pi \cdot [(76{,}32 - 25{,}40) - (54 - 9)] =$

$= (50{,}92 - 45) \cdot \pi = \underline{5{,}92 \cdot \pi}$

$V_1 = 13{,}3 \cdot \pi$ VE $V_2 = 5{,}92 \cdot \pi$ VE $\underline{V = 60{,}38 \text{ VE}}$

V_1 = Rotation der Parabel im Intervall (0; x_s)
V_2 = Rotation des Kreises im Intervall (x_s; r)



k: $x^2 + y^2 = 45$; p: $y^2 = \frac{3}{2}x$;

k: $\rightarrow\ y^2 = 45 - x^2 \quad r = \sqrt{45} = 6{,}7$

$\rightarrow\ k \cap p$: $x^2 + y^2 = 45$; $\rightarrow\ y^2 = \frac{3}{2}x$;

$x^2 + \frac{3}{2}x - 45 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{720}{16}} \rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{729}{16}}$

$x_1 = +6$; $[x_2 = -10]$

Da die Parabel in der 1. Hauptlage gegeben ist, ist die negative Lösung x_2 nicht möglich! → siehe Skizze!

$V = V_1 + V_2$

$V_1 = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^{+6} \frac{3}{2}x \cdot dx = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^{+6} =$

$= \pi \cdot \left(\frac{108}{4} - 0\right) = \underline{27 \cdot \pi}$

$V_2 = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{+6}^{+6{,}7} (45 - x^2) \cdot dx =$

$= \pi \cdot \left(45x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{+6}^{+6{,}7} = \pi \cdot [(301{,}5 - 100{,}25) - (270 - 72)] =$

$= (201{,}25 - 198) \cdot \pi = \underline{3{,}25 \cdot \pi}$

$V_1 = 27 \cdot \pi$ VE $V_2 = 3{,}25 \cdot \pi$ VE $\underline{V = 95{,}03 \text{ VE}}$

Autor: Robert Kohout | **Thema:** Funktionen, Integralrechnungen, Volumen, Rotationskörper, Kreis, Parabel