

Vektoren im Raum – das Vektorprodukt berechnen

Arbeitsblatt 1

Berechnen Sie das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ der gegebenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} und mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms!

Für die Berechnung des Vektorprodukts ist zu beachten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n}_x = \begin{vmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_x = y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a$$

$$\rightarrow \vec{n}_y = - \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_y = - [x_a \cdot z_b - x_b \cdot z_a]$$

Bei \vec{n}_y das Minuszeichen beachten!

$$\rightarrow \vec{n}_z = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_z = x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a$$

Der Betrag des Vektorprodukts gibt den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms an!

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} +4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} +6 \\ +3 \\ +2 \end{pmatrix};$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} +4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +6 \\ +3 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_x = \begin{vmatrix} -5 & +3 \\ -4 & +2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = +2$$

$$\vec{n}_y = - \begin{vmatrix} +4 & +6 \\ -4 & +2 \end{vmatrix} = - [4 \cdot 2 - 6 \cdot (-4)] = -32$$

$$\vec{n}_z = \begin{vmatrix} +4 & +6 \\ -5 & +3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot (-5) = +42$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} +2 \\ -32 \\ +42 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-32)^2 + 42^2} = \sqrt{2792}$$

$$A = 52,83 \text{ FE} \quad (\text{FE} = \text{Flächeneinheiten})$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} +3 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} +6 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} +14 \\ -42 \\ +42 \end{pmatrix}$$

$$A = 61,02 \text{ FE}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ +4 \\ +4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} +3 \\ -2 \\ +2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} +16 \\ +16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$A = 24 \text{ FE}$$