Vektoren im Raum – das Vektorprodukt berechnen

Lösungsblatt 1

Berechnen Sie das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ der gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms!

Für die Berechnung des Vektorprudukts ist zu beachten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n}_x = \begin{vmatrix} ya & yb \\ za & zb \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_x = y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a$$

$$\rightarrow \vec{n}_y = -\begin{vmatrix} xa & xb \\ za & zb \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_y = -[x_a \cdot z_b - x_b \cdot z_a]$$

Bei $\vec{n}_y$ das Minuszeichen beachten!

$$\rightarrow \vec{n}_z = \begin{vmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n}_z = x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a$$

Der Betrag des Vektorprodukts gibt den ***Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms*** *an!*

$$\mathbf{A = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{vmatrix} +4 \\ -5 \\ -4 \end{vmatrix}; \vec{b} = \begin{vmatrix} +6 \\ +3 \\ +2 \end{vmatrix};$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +4 \\ -5 \\ -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +6 \\ +3 \\ +2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_x = \begin{vmatrix} -5 & +3 \\ -4 & +2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = +2$$

$$\vec{n}_y = -\begin{vmatrix} +4 & +6 \\ -4 & +2 \end{vmatrix} = -[4 \cdot 2 - 6 \cdot (-4)] = -32$$

$$\vec{n}_z = \begin{vmatrix} +4 & +6 \\ -5 & +3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot (-5) = +42$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +2 \\ -32 \\ +42 \end{vmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-32)^2 + 42^2} = \sqrt{2792}$$

$\underline{A = 52{,}83 \text{ FE}}$ *(FE = Flächeneinheiten)*

$\vec{a} = \begin{vmatrix} +3 \\ -5 \\ -6 \end{vmatrix}; \vec{b} = \begin{vmatrix} +6 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix};$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +3 \\ -5 \\ -6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +6 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_x = \begin{vmatrix} -5 & +4 \\ -6 & +2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 2 - 4 \cdot (-6) = +14$$

$$\vec{n}_y = -\begin{vmatrix} +3 & +6 \\ -6 & +2 \end{vmatrix} = -[3 \cdot 2 - 6 \cdot (-6)] = -42$$

$$\vec{n}_z = \begin{vmatrix} +3 & +6 \\ -5 & +4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot (-5) = +42$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +14 \\ -42 \\ +42 \end{vmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + 42^2} = \sqrt{3724}$$

$\underline{A = 61{,}02 \text{ FE}}$

$\vec{a} = \begin{vmatrix} -2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix}; \vec{b} = \begin{vmatrix} +3 \\ -2 \\ +2 \end{vmatrix};$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +3 \\ -2 \\ +2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_x = \begin{vmatrix} +4 & -2 \\ +4 & +2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-2) \cdot 4 = +16$$

$$\vec{n}_y = -\begin{vmatrix} -2 & +3 \\ +4 & +2 \end{vmatrix} = -[(-2) \cdot 2 - 3 \cdot 4] = +16$$

$$\vec{n}_z = \begin{vmatrix} -2 & +3 \\ +4 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -8$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +16 \\ +16 \\ -8 \end{vmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{16^2 + 16^2 + (-8)^2} = \sqrt{576}$$

$\underline{A = 24 \text{ FE}}$

Autor: Robert Kohout | **Thema:** Analytische Geometrie, Vektoren, Raum, Vektorprodukt, vektorielle Produkt, Parallelogramm