

Maturabeispiele – Flächeninhalt einer Polynomfunktion

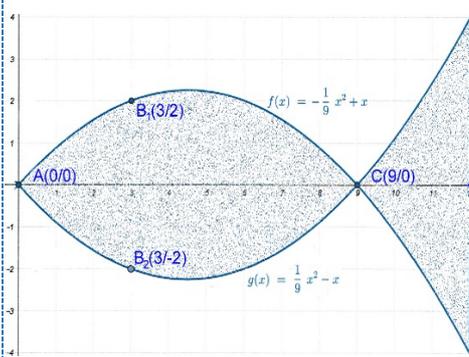
Lösungsblatt 22

Das Fisch-Symbol ist ein bekanntes religiöses Symbol und wird in der nachfolgenden Abbildung mit den Punkten **A**, **B₁** und **C** bzw. mit den Punkten **A**, **B₂** und **C** beschrieben.

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen zweiten Grades **f(x)** und **g(x)**, die durch die gegebenen Punkte gehen! **f(x)** → A, B₁ und C ; **g(x)** → A, B₂ und C ;

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fisches im Intervall [0;12;]! (Angaben in dm!)

Anmerkung: *f(x) und g(x) sind symmetrisch bezüglich der x-Achse!*



a) **f(x):** $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
 I.: $0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \rightarrow c = 0$
 II: $2 = 3^2 \cdot a + 3 \cdot b + 0$
III: $0 = 9^2 \cdot a + 9 \cdot b + 0$
 II: $2 = 9 \cdot a + 3 \cdot b \quad | \cdot (-3)$
III: $0 = 81 \cdot a + 9 \cdot b$
 II: $-6 = -27 \cdot a - 9 \cdot b$
III: $0 = +81 \cdot a + 9 \cdot b$

II + III: $54 \cdot a = -6$
 $a = -\frac{6}{54}; \quad a = -\frac{1}{9};$
 II: $2 = 9 \cdot a + 3 \cdot b$
 $2 = 9 \cdot (-\frac{1}{9}) + 3 \cdot b$
 $3 \cdot b = 3; \quad b = 1$
f(x): $y = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + x;$
aufgrund der Symmetrie:
g(x): $y = +\frac{1}{9} \cdot x^2 - x;$

$A_1 = \left\{ \int_0^{+9} f(x) \cdot dx = \left\{ \left(-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \Big|_0^{+9} \right\} \right\}$

$A_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{27} \cdot 9^3 + \frac{1}{2} \cdot 9^2 \right) + 0 \right\}$

$A_1 = -\frac{1}{27} \cdot 729 + \frac{1}{2} \cdot 81$

$\rightarrow A_1 = -27 + 40,5 = \underline{+13,5}$

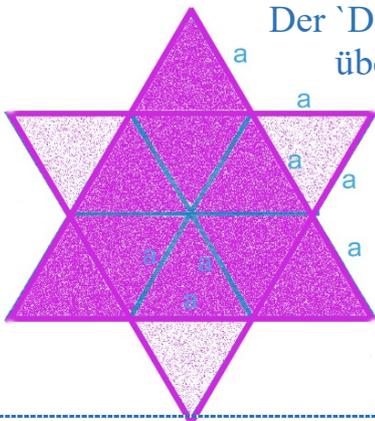
$A_2 = \left\{ \int_{+9}^{12} f(x) \cdot dx = \left\{ \left(-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \Big|_{+9}^{+12} \right\} \right\}$

$A_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{27} \cdot 12^3 + \frac{1}{2} \cdot 12^2 \right) - \left(-\frac{1}{27} \cdot 9^3 + \frac{1}{2} \cdot 9^2 \right) \right\}$

$A_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{27} \cdot 1728 + \frac{1}{2} \cdot 144 \right) - \left(-\frac{1}{27} \cdot 729 + \frac{1}{2} \cdot 81 \right) \right\}$

$\rightarrow A_2 = \{ (+8) - (+13,5) \} = \underline{-5,5}$

$A = 2 \cdot \{ |A_1| + |A_2| \} = 2 \cdot \{ |13,5| + |5,5| \} \rightarrow \underline{A = 38 \text{ dm}^2}$



Der 'Davidstern' ist ein bekanntes religiöses Symbol. Er besteht aus zwei übereinanderliegenden gleichseitigen Dreiecken, die in 12 kleine gleichseitige Dreiecke mit der Seite a unterteilt werden können:

Wie lautet die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts?

$A_{\blacktriangle} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}; \quad A_{\text{Stern}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 12$

$A_{\text{Stern}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot 4; \rightarrow \underline{A_{\text{Stern}} = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}$

a = 5 cm: $\rightarrow A_{\text{Stern}} = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \rightarrow A_{\text{Stern}} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3}$

$\underline{A_{\text{Stern}} = 129,90 \text{ cm}^2 \approx 1,3 \text{ dm}^2}$