Vektoren im Raum – Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen

Lösungsblatt 1

Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Eckpunkte gegebenen Dreiecks mit der vektoriellen Flächenformel $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2}$ *und mit Hilfe des Vektorprodukts!*

Beispiel: *A(-2/0/4), B(-2/3/3), C(2/3/5)*

$\vec{a} = AB = \begin{vmatrix} -2-(-2) \\ 3-0 \\ 3-4 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix}$

$\vec{b} = AC = \begin{vmatrix} 2-(-2) \\ 3-0 \\ 5-4 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{b}| =. \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} = +0 +9 -1 = 8$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10 \cdot 26 - 8^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{196}$ **A = 7 FE**

*Berechnung mit dem **Vektorprodukt**!*

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +6 \\ -4 \\ -12 \end{vmatrix}$

$n_x = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = +6$

$n_y = -[0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)] = -4$

$n_z = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = -12$

$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-12)^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{196}$ **A = 7 FE**

Anmerkung: *Der Wert des Vektorprodukts ergibt den Flächeninhalt des durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Daher muss für das Dreieck dieser Wert* **mal** $\frac{1}{2}$ *gerechnet werden!*

A(-3/2/5), B(2/-3/4), C(5/4/3)

$\vec{a} = AB = \begin{vmatrix} 2-(-3) \\ -3-2 \\ 4-5 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix}$

$\vec{b} = AC = \begin{vmatrix} 5-(-3) \\ 4-2 \\ 3-5 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{51}$

$|\vec{b}| =. \sqrt{8^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix} = +40 - 10 + 2 = 32$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{51 \cdot 72 - 32^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2648}$ **A = 25,72 FE**

*Berechnung mit dem **Vektorprodukt**!*

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +12 \\ +2 \\ +40 \end{vmatrix}$

$n_x = (-5) \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = +12$

$n_y = -[5 \cdot (-2) - 8 \cdot (-1)] = +2$

$n_z = 5 \cdot 2 - 8 \cdot (-5) = +50$

$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + 2^2 + 50^2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2648}$ **A = 25,72 FE**

Autor: Robert Kohout | **Thema:** Analytische Geometrie, Vektoren, Raum, Flächeninhalt, Dreieck, vektorielle Flächenformel, Vektorprodukt