

Vektoren im Raum – Volumenberechnungen mit $\vec{a} \times \vec{b}$

Lösungsblatt 1

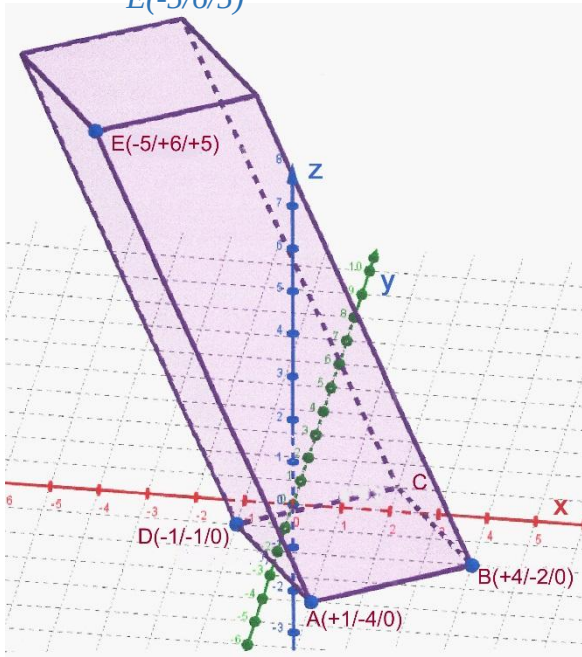
Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds mit den gegebenen Eckpunkten A, B, D und E

mit der vektoriellen Volumensformel $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$!

Anmerkung: Ein Parallelepiped ist ein schiefes Prisma mit sechs Parallelogrammen als Seitenflächen. Die gegenüberliegenden Seitenflächen sind kongruent!

Beispiel: A(1/-4/0), B(4/-2/0), D(-1/-1/0),

E(-5/6/5)



$$\vec{a} = AB = \begin{vmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \\ 0-0 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} = AD = \begin{vmatrix} 2-(-1) \\ 3-0 \\ 5-0 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +3 \\ +3 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = AE = \begin{vmatrix} 8-(-5) \\ 6-(-4) \\ 10-0 \end{vmatrix} \quad \vec{c} = \begin{vmatrix} +13 \\ +10 \\ +10 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +3 \\ +3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{vmatrix}$$

$$n_x = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$n_y = -[3 \cdot 0 - (-2) \cdot 0] = 0$$

$$n_z = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 13$$

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -6 \\ +10 \\ +5 \end{vmatrix}; V = | +0 + 0 + 65 |; V = | +65 |$$

$$\underline{V = 65 \text{ VE}} \rightarrow \text{VE} = \text{Volumeneinheiten}$$

A(-2/0/4), B(-2/3/3), D(2/3/5), E(8/6/10)

$$\vec{a} = AB = \begin{vmatrix} -2-(-2) \\ 3-0 \\ 3-4 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} = AD = \begin{vmatrix} 2-(-2) \\ 3-0 \\ 5-0 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = AE = \begin{vmatrix} 8-(-2) \\ 6-0 \\ 10-4 \end{vmatrix} \quad \vec{c} = \begin{vmatrix} +10 \\ +6 \\ +6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +6 \\ -4 \\ -12 \end{vmatrix}$$

$$n_x = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = +6$$

$$n_y = -[0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)] = -4$$

$$n_z = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = -12$$

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$V = \begin{vmatrix} +6 \\ -4 \\ -12 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +10 \\ +6 \\ +6 \end{vmatrix}$$

$$V = | +60 - 24 - 72 |$$

$$V = | -36 |$$

$$\underline{V = 36 \text{ VE}} \rightarrow \text{VE} = \text{Volumeneinheiten}$$