

Arithmetik – Algebraische Gleichungen höheren Grades

Lösungswege 1 von 2

Lösen Sie folgende Gleichungen über die Grundmenge $G = \mathbb{C}$!

*) Abspaltungsmethode!

$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 1. Schritt: Man nimmt als Lösung der gegebenen Gleichung $x_1 = +1$ an und setzt probeweise in die Gleichung ein!

$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$
 $1 - 3 - 6 + 8 = 0 \rightarrow 0 = 0; \text{ w.A.}$

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 2. Schritt: Da das Ergebnis eine wahre Aussage ist, kann nun die gegebene Gleichung durch das Polynom " $(x-1)$ " dividiert werden.

$$(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x-1) = x^2 - 2x - 8$$

$$\begin{array}{r} \pm x^3 \mp x^2 \\ \hline -2x^2 - 6x + 8 \\ \mp 2x^2 \mp 2x \\ \hline -8x + 8 \\ \mp 8x \pm 8 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 3. Schritt: Man erhält eine quadratische Gleichung, aus der x_2 und x_3 berechnet werden können!

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 8}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm 3; \rightarrow x_2 = +4; \quad x_3 = -2;$$

$L = \{-2, +1, +4\}$

$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$

$\rightarrow \rightarrow$ 1. Schritt: Für die Berechnung des Polynomwertes für 'x' kann das Schema von HORNER verwendet werden!

	$+1 \cdot x^3$	$+5 \cdot x^2$	$-4 \cdot x$	-20	$= 0$
	$a_3 = +1$	$a_2 = +5$	$a_1 = -4$	$a_0 = -20$	
$x^1 = +1$	+1	$(+1) \cdot (+1) + 5 = +6$	$(+1) \cdot (+6) - 4 = +2$	$(+1) \cdot (+2) - 20 = -18$	-18
$x^1 = -1$	+1	$(-1) \cdot (+1) + 5 = +4$	$(-1) \cdot (+4) - 4 = -8$	$(-1) \cdot (-8) - 20 = -18$	-18
$x^1 = -2$	+1	$(-2) \cdot (+1) + 5 = +3$	$(-2) \cdot (+3) - 4 = -10$	$(-2) \cdot (-10) - 20 = 0$	0
		$x \cdot a_3 + a_2 = \text{Summe 1}$	$x \cdot \text{Summe 1} + a_1 = \text{Summe 2}$	$x \cdot \text{Summe 2} + a_0 =$	Polynomwert

$\rightarrow \rightarrow$ 2. Schritt: $x_1 = -2!$

$(x^3 + 5x^2 - 4x - 20) : (x + 2) = x^2 + 3x - 10$

$$\begin{array}{r} \pm x^3 \pm 2x^2 \\ \hline +3x^2 - 4x - 20 \\ \mp 3x^2 \pm 6x \\ \hline -10x - 20 \\ \mp 10x \mp 20 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$\rightarrow \rightarrow$ 3. Schritt: Lösung der quadratischen Gleichung!

$$x_{2,3} = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10}; \quad x_{2,3} = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}};$$

$$x_{2,3} = \frac{-3}{2} \pm \frac{7}{2}; \quad x_2 = +2; \quad x_3 = -5;$$

$L = \{-5; -2; +2\}$