Die Gerade im Raum – Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Lösungsblatt 1

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von zwei im Raum liegenden Geraden!

$g:\ X = \begin{vmatrix}+0\\+5\\+5\end{vmatrix} + t\,.\begin{vmatrix}+7\\-1\\0\end{vmatrix};\qquad h:\ X = \begin{vmatrix}+7\\+4\\+5\end{vmatrix} + s\,.\begin{vmatrix}-6\\+3\\-4\end{vmatrix};$

*1. Schritt: Da die Richtungsvektoren der beiden Geraden nicht proportional sind, sind die Geraden g und h zueinander windschief (kreuzend → **kein Schnittpunkt!**) oder schneidend (→ **mit Schnittpunkt!**). Die x-, y- und z- Koordinaten der Geraden werden gleichgesetzt und die Parameter "s" und "t" können berechnet werden!*

$$\begin{array}{ll}
\text{I:} & 0 + 7\,.\,t = 7 - 6\,.\,s \\
\text{II:} & 5 - t = 4 + 3\,.\,s \\
\underline{\text{III:}} & \underline{5 + 0\,.\,t = 5 - 4\,.\,s} \quad\rightarrow\quad 5 = 5 - 4\,.\,s \quad\rightarrow\quad 4\,.\,s = 0 \\
\text{I:} & 0 + 7\,.\,t = 7 - 6\,.\,s \qquad\qquad \underline{s = 0} \\
\underline{\text{II:}} & \underline{10 - 2\,.\,t = 8 + 6\,.\,s} \\
 & 10 + 5\,.\,t = 15 \\
 & +5\,.\,t = +5 \quad\rightarrow\quad \underline{t = +1}
\end{array}$$

$g:\ X = \begin{vmatrix}+0\\+5\\+5\end{vmatrix} + t\,.\begin{vmatrix}+7\\-1\\0\end{vmatrix};\quad S = \begin{vmatrix}+0\\+5\\+5\end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix}+7\\-1\\0\end{vmatrix};$

$\underline{S = (+7/+4/+5)}$

$h:\ X = \begin{vmatrix}+7\\+4\\+5\end{vmatrix} + s\,.\begin{vmatrix}-6\\+3\\-4\end{vmatrix};\quad S = \begin{vmatrix}+7\\+4\\+5\end{vmatrix} + 0\,.\begin{vmatrix}-6\\+3\\-4\end{vmatrix};$

$\underline{S = (+7/+4/+5)}$

2. Schritt: Der Schnittwinkel wird mit der Formel $\cos\varphi = \frac{\vec{g}\,.\,\vec{h}}{|\vec{g}|\,.\,|\vec{h}|}$ *berechnet!*

$\vec{g} = \begin{vmatrix}+7\\-1\\0\end{vmatrix};\quad \vec{h} = \begin{vmatrix}-6\\+3\\-4\end{vmatrix};$

$\vec{g}\,.\,\vec{h} = [7\,.\,(-6) + (-1)\,.\,3 + 0\,.\,(-4)] = \underline{-45}$

$|\vec{g}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \underline{\sqrt{50}}$

$|\vec{h}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+9+16} = \underline{\sqrt{61}}$

$\cos\varphi = \frac{\vec{g}\,.\,\vec{h}}{|\vec{g}|\,.\,|\vec{h}|}$

$\cos\varphi = \frac{-45}{\sqrt{50}\,.\,\sqrt{61}} = -0{,}8148....$

$\underline{\varphi = 144{,}57°} \quad\rightarrow\quad \underline{\varphi = 35{,}43°}$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von zwei im Raum liegenden Geraden!

$g:\ X = \begin{vmatrix}+2\\+2\\+4\end{vmatrix} + t\,.\begin{vmatrix}-3\\0\\-2\end{vmatrix};\qquad h:\ X = \begin{vmatrix}+3\\+4\\+6\end{vmatrix} + s\,.\begin{vmatrix}+2\\+1\\+2\end{vmatrix};$

$$\begin{array}{ll}
\text{I:} & 2 - 3\,.\,t = 3 + 2\,.\,s \\
\text{II:} & 2 + 0\,.\,t = 4 + 1\,.\,s \quad\rightarrow\quad 2 = 4 + s \quad\rightarrow\quad \underline{s = -2} \\
\underline{\text{III:}} & \underline{4 - 2\,.\,t = 6 + 2\,.\,s} \\
\text{I:} & -2 + 3\,.\,t = -3 - 2\,.\,s \\
\underline{\text{III:}} & \underline{4 - 2\,.\,t = +6 + 2\,.\,s} \\
 & +2 + t = +3 \\
 & t = +5 \quad\rightarrow\quad \underline{t = +1}
\end{array}$$

$g:\ X = \begin{vmatrix}+2\\+2\\+4\end{vmatrix} + t\,.\begin{vmatrix}-3\\0\\-2\end{vmatrix};\quad S = \begin{vmatrix}+2\\+2\\+4\end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix}-3\\0\\-2\end{vmatrix};$

$\underline{S = (-1/+2/+2)}$

$h:\ X = \begin{vmatrix}+3\\+4\\+6\end{vmatrix} + s\,.\begin{vmatrix}+2\\+1\\+2\end{vmatrix};\quad S = \begin{vmatrix}+3\\+4\\+6\end{vmatrix} + (-2)\,.\begin{vmatrix}+2\\+1\\+2\end{vmatrix};$

$\underline{S = (-1/+2/+2)}$

$\vec{g} = \begin{vmatrix}-3\\0\\-2\end{vmatrix};\quad \vec{h} = \begin{vmatrix}+2\\+1\\+2\end{vmatrix};$

$\vec{g}\,.\,\vec{h} = [(-3)\,.\,2 + 0\,.\,1 + (-2)\,.\,2] = \underline{-10}$

$|\vec{g}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \underline{\sqrt{13}}$

$|\vec{h}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \underline{\sqrt{9} = 3}$

$\cos\varphi = \frac{\vec{g}\,.\,\vec{h}}{|\vec{g}|\,.\,|\vec{h}|}$

$\cos\varphi = \frac{-10}{\sqrt{13}\,.\,3} = -0.924500327042$

$\underline{\varphi = 157{,}59°} \quad\rightarrow\quad \underline{\varphi = 22{,}41°}$