Funktionen – Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendestelle

Lösungsblatt 2

*Eine Funktion **f(x): $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$** ist gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen **N**, der Extremstellen **H** und **T**, des Wendepunktes **W** und die Wendetangente t_w!*

$f(x):\ y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad f'(x):\ y' = 3x^2 - 6x - 9 \quad \rightarrow \quad f''(x):\ y'' = 6x - 6$

Berechnung der Nullstellen: N → f(x) = 0

$f(x):\ x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0 \qquad \underline{x_1 = -1}$

$(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) : (x + 1) = \underline{x^2 - 4x - 5}$

$\underline{\pm x^3 \pm x^2}$

$-4x^2 - 9x$

$\underline{\mp 4x^2 \mp 4x}$

$-5x - 5$

$\underline{\mp 5x \mp 5}$

$0 \quad 0$

$\underline{x_1 = -1; \rightarrow N_1 = (-1/0)}$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x_{2,3} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{2,3} = \frac{+4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 5}$

$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{9}; \quad \rightarrow \quad x_{2,3} = 2 \pm 3$

$\underline{x_2 = +5; \quad \rightarrow N_2 = (+5/0)}$

$\underline{x_3 = -1; \quad \rightarrow N_3 = (-1/0)}$

Berechnung der Extremstellen: H und T → f´(x) = 0

$f'(x):\ 3.x^2 - 6.x - 9 = 0 \qquad |:3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ; \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3}\ ;$

$x_{1,2} = 1 \pm 2 \quad \rightarrow \quad \underline{x_1 = +3} \qquad \underline{x_2 = -1}$

$y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 - 9x_1 - 5$

$y_1 = 3^3 - 3.3^2 - 9.3 - 5 \quad \rightarrow \quad \underline{y_1 = -32}$

$y_2 = x_2^3 - 3x_2^2 - 9x_2 - 5$

$y_2 = (-1)^3 - 3.(-1)^2 - 9.(-1) - 5 \rightarrow \underline{y_2 = 0}$

$\underline{T = (+3/-32)} \quad \underline{H = (-1/0)}$

Berechnung des Wendepunktes: W → f´´(x) = 0

$f''(x):\ +6x - 6 = 0$

$+6x = +6; \quad \underline{x = +1}$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$y = 1^3 - 3.1^2 - 9.1 - 5$

$\underline{y = -16} \qquad \underline{W = (+1/-16)}$

Berechnung der Tangente w_t: $y = k.x + d$;

Steigung der Tangente in W(+1/-16) → $f'(x_w) = k_t$

$f'(x):\ y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y' = k = 3.1^2 - 6.1 - 9$

$\underline{k = -12}$

$w_t:\ y = k.x + d \quad \rightarrow \quad -16 = -12.1 + d \quad | +12$

$\underline{d = -4}$

$\underline{w_t:\ y = -12x - 4}$

Berechnung der Steigung der Tangente k in W(+1/-16) mittels Grenzwertüberlegung:

$$f'(+1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(xo+\Delta x)^2 - f(xo)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x)^2 - 9(x+\Delta x) - 5 - (x^3 - 3x^2 - 9x - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^3 - 3(1+\Delta x)^2 - 9(1+\Delta x) - 5 - (1^3 - 3.1^2 - 9.1 - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3 - 6\Delta x - \Delta x^2 - 9 - 9\Delta x - 5 + 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-16 + \Delta x^3 + 2\Delta x^2 - 12\Delta x + 16}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{+\Delta x^3 + 2\Delta x^2 - 12\Delta x}{\Delta x} \quad |:\Delta x\ ; \quad = \lim_{\Delta x \to 0} (-12) \rightarrow \underline{k = -12};$$

$w_t:\ y = k.x + d \quad \rightarrow \quad -16 = -12.1 + d \quad | +12; \quad \rightarrow \quad \underline{d = -4} \quad \rightarrow \quad \underline{w_t:\ y = -12x - 4}$