Die Gerade im Raum – Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Schwerlinien

Lösungsblatt 1

Gegeben: Δ ABC: A(2/-1/3), B(6/3/1), C(4/4/2);
Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Schnittpunkt von zwei Schwerlinien!

Anleitung: *Die Schwerlinie ist die Strecke zwischen einem Eckpunkt und dem Halbierungspunkt der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite! z.B.:* ***sb = $|\overrightarrow{BHb}|$***

1. Berechnung der Halbierungspunkte!

$H_c = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ $\qquad$ $H_b = \frac{1}{2} \cdot (A + C)$

$H_c = \frac{1}{2} \cdot (2+6\,/\,-1+3\,/\,3+1)$ $\qquad$ $H_b = \frac{1}{2} \cdot (2+4\,/\,-1+4\,/\,3+2)$

$H_c = \frac{1}{2} \cdot (8/2/4)$ $\qquad$ $H_b = \frac{1}{2} \cdot (6/3/5)$

$\underline{H_c = (4/1/2)}$ $\qquad$ $\underline{H_b = (3/1{,}5/2{,}5)}$

2. Parameterdarstellung der Schwerlinien s_c und s_b!

s_c: $X = C + t \cdot |\overrightarrow{CHc}| \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{CHc}| = \begin{vmatrix} 4-4 \\ 1-4 \\ 2-2 \end{vmatrix}$

s_c: $X = \begin{vmatrix} +4 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$;

s_b: $X = B + s \cdot |\overrightarrow{BHb}| \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{BHb}| = \begin{vmatrix} 3-6 \\ 1{,}5-3 \\ 2{,}5-1 \end{vmatrix}$

s_b: $X = \begin{vmatrix} +6 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ -1{,}5 \\ +1{,}5 \end{vmatrix}$;

3. Berechnung der Schwerpunktkoordinaten: $s_c \cap s_b$!

s_c: $X = \begin{vmatrix} +4 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \cap \quad s_b$: $X = \begin{vmatrix} +6 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ -1{,}5 \\ +1{,}5 \end{vmatrix}$

I: $\quad 4 + 0 \cdot t = 6 - 3 \cdot s \quad \rightarrow 4 = 6 - 3 \cdot s \rightarrow \mathbf{s = \frac{2}{3}}$

II: $\quad 4 - 3 \cdot t = 3 - 1{,}5 \cdot s$

$\underline{\text{III:} \quad 2 + 0 \cdot t = 1 + 1{,}5 \cdot s}$

II + III: $\quad 6 - 3 \cdot t = +4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = \frac{2}{3}}$

$S = C + t \cdot |\overrightarrow{CHc}|$

$S = \begin{vmatrix} +4 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$; $\qquad \underline{S = (4/+2/+2)}$

$S = B + s \cdot |\overrightarrow{BHb}|$

$S = \begin{vmatrix} +6 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ -1{,}5 \\ +1{,}5 \end{vmatrix}$; $\qquad \underline{S = (4/+2/+2)}$

Gegeben: Δ ABC: A(4/-3/6), B(4/6/2), C(-5/3/-2);
Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Schnittpunkt von zwei Schwerlinien!

$H_c = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ $\qquad$ $H_a = \frac{1}{2} \cdot (B + C)$

$H_c = \frac{1}{2} \cdot (8/3/8)$ $\qquad$ $H_a = \frac{1}{2} \cdot (-1/9/0)$

$\underline{H_c = (4/1{,}5/4)}$ $\qquad$ $\underline{H_a = (-0{,}5/4{,}5/0)}$

s_c: $X = C + t \cdot |\overrightarrow{CHc}| \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{CHc}| = \begin{vmatrix} 4-(-5) \\ 1{,}5-3 \\ 4-(-2) \end{vmatrix}$

s_c: $X = \begin{vmatrix} -5 \\ +3 \\ -2 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +9 \\ -1{,}5 \\ +6 \end{vmatrix}$

s_a: $X = A + s \cdot |\overrightarrow{AHa}| \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{AHa}| = \begin{vmatrix} -0{,}5-4 \\ 4{,}5-(-3) \\ 0-6 \end{vmatrix}$

s_a: $X = \begin{vmatrix} +4 \\ -3 \\ +6 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -4{,}5 \\ +7{,}5 \\ -6 \end{vmatrix}$;

s_c: $X = \begin{vmatrix} -5 \\ +3 \\ -2 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +9 \\ -1{,}5 \\ +6 \end{vmatrix} \quad \cap \quad s_a$: $X = \begin{vmatrix} +4 \\ -3 \\ +6 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -4{,}5 \\ +7{,}5 \\ -6 \end{vmatrix}$

I: $\quad -5 + 9 \cdot t = +4 - 4{,}5 \cdot s$

II: $\quad 3 - 1{,}5 \cdot t = -3 + 7{,}5 \cdot s \qquad | \cdot 4$

$\underline{\text{III:} \quad -2 + 6 \cdot t = +6 - 6 \cdot s}$

II: $\quad 12 - 6 \cdot t = -12 + 30 \cdot s$

$\underline{\text{III:} \quad -2 + 6 \cdot t = +6 - 6 \cdot s}$

$10 = -6 + 24\,s \quad \rightarrow \quad \mathbf{s = \frac{2}{3}}$

$S = \begin{vmatrix} +4 \\ -3 \\ +6 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} -4{,}5 \\ +7{,}5 \\ -6 \end{vmatrix} \qquad \underline{S = (+1/+2/+2)}$

Der Schwerpunkt im Dreieck könnte auch so berechnet werden:

$[\; S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)] = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} +4+4-5 \\ -3+6+3 \\ +6+2-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} +3 \\ +6 \\ +6 \end{vmatrix}$

$\underline{S = (+1/+2/+2)} \;]$