Arithmetik – Anwendung der arithmetischen und geometrischen Reihen im Bankwesen → Lohn-, Raten-, Kredit- und Versicherungszahlungen

Lösungsblatt 8

Herr Sorgsam zahlt ab seinem 50. Lebensjahr am Beginn eines jeden Jahres (→ man nennt das \`vorschüssig´) 15 Jahre lang in seine Lebensversicherung 1.200 € ein. Diese Prämie wird mit 4 % verzinst. Wie hoch ist die Einmalzahlung (= Prämie + Verzinsung), die sich Herr Sorgsam nach 15 Jahren auszahlen lässt?

Anleitung: E = Einmalzahlung; P = Prämie; q = 1,04;

$E = P \cdot 1{,}04^{15} + P \cdot 1{,}04^{14} + \ldots + P \cdot 1{,}04 = P \cdot 1{,}04 \cdot (1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + \ldots + 1{,}04^{14})$

$E = P \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \rightarrow \quad E = 1200 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{1{,}04 - 1} \quad \rightarrow \quad \underline{E = 22.828{,}30\ €}$

Herr Sorgsam erhält nach 15 Jahren eine Einmalzahlung von **22.828,30 €**.

Herr Sorgsam will diese Einmalzahlung in eine Rente umwandeln, die 10 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres (→ \`nachschüssig´) ausgezahlt werden soll und die jedes Jahr um 2 % erhöht werden soll. Wie hoch ist die erste Rentenzahlung?

Anleitung: E = Einmalzahlung; R = Rente; q = 1,02;

$E = R \cdot 1{,}02^9 + P \cdot 1{,}02^8 + \ldots + R \cdot 1{,}02 = R \cdot (1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \ldots + 1{,}02^9)$

$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \rightarrow \quad 22828{,}30 = R \cdot \frac{1{,}02^{10} - 1}{1{,}02 - 1}$

$\rightarrow \quad R = 22828{,}30 \cdot \frac{1{,}02 - 1}{1{,}02^{10} - 1}$

$\rightarrow \quad \underline{R = 2.084{,}83\ €}$ Die erste Rente beträgt **2.084,83 €**.

Der Restbetrag soll während der Rentenzahlung weiterhin mit 4 % verzinst werden!

*Erklärung: Der für die erste Rente benötigte Betrag X_1 ist kleiner als R, denn er wird ja bis zur Fälligkeit mit 4 % verzinst, **daher:*** $X_1 = \frac{R}{1{,}04}$; $X_2 = \frac{R \cdot 1{,}02}{1{,}04^2}$; $X_3 = \frac{R \cdot 1{,}02^2}{1{,}04^3}$; ....

$E = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \quad \rightarrow \quad E = \frac{R}{1{,}04} \cdot \left[1 + \frac{1{,}02}{1{,}04} + \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^2 + \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^9\right]$

$E = R \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^{10} - 1\right] : \left[\left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right) - 1\right] \right\} \quad \rightarrow \quad R = 22828{,}30 \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right) - 1\right] : \left[\left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^{10} - 1\right] \right\}$

$\rightarrow \quad \underline{R = 2487{,}41\ €}$

Die erste Rente beträgt **2.487,41 €**