Die Gerade im Raum – Die Lage zweier Geraden zueinander

Lösungsblatt 1

Die Geraden g_1 und g_2 sind zueinander

parallel → $g_1 \parallel g_2$, wenn $g_1 \cap g_2 = S = \{\ \}$; → **kein Schnittpunkt!** $\vec{g}_1 \parallel g_2$ → die Richtungsvektoren der Geraden sind **proportional!**
zusammenfallend → $g_1 = g_2$, wenn $g_1 \cap g_2 = S = \{\ \}$; → **kein Schnittpunkt!** **identisch** $\vec{g}_1 \parallel \vec{g}_2$ → die Richtungsvektoren der Geraden sind **proportional!** $\varphi = 0°$; → der Schnittwinkel = 0°
schneidend → $g_1 \cap g_2$, wenn $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ → **ein Schnittpunkt!** → die Parameter s und t **erfüllen alle Gleichungen (I, II und III) !** → die Richtungsvektoren a_1 und a_2 sind **nicht proportional!**
windschief → wenn $g_1 \cap g_2 = S = \{\ \}$; → **kein Schnittpunkt!** → die Parameter **s** und **t** **erfüllen nicht <u>alle Gleichungen</u> (I, II und III) !** → die Richtungsvektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$ sind **nicht proportional!**

Untersuchen Sie in den folgenden Beispielen die Lage der gegebenen Geraden zueinander!

$$g: X = \begin{vmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} +5 \\ +2 \\ +4 \end{vmatrix}; \quad h: X = \begin{vmatrix} +0 \\ +1 \\ -5 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && -4 + 5 \cdot s = 0 + 2 \cdot t \\
&\text{II:} && 0 + 2 \cdot s = 1 - 1 \cdot t \\
&\underline{\text{III:}} && \underline{-5 + 4 \cdot s = -5 - 1 \cdot t} \\
&\text{II:} && 0 - 4 \cdot s = -2 + 2 \cdot t \\
&\underline{\text{III:}} && \underline{-5 + 4 \cdot s = -5 - 1 \cdot t} \\
& && -5 = -7 + t \\
& && \underline{\mathbf{t = +2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II:} && 0 - 2 \cdot s = -1 + 1 \cdot t \\
&\underline{\text{III:}} && \underline{-5 + 4 \cdot s = -5 - 1 \cdot t} \\
& && -5 + 2 \cdot s = -6 \\
& && \mathbf{s = -\tfrac{1}{2}} \\
&\text{I:} && -4 + 5 \cdot s = 0 + 2 \cdot t \\
& && -4 + 5 \cdot (-0{,}5) = 0 + 2 \cdot 2 \\
& && \underline{-6{,}5 \neq +4}
\end{aligned}$$

*Die Parameter **s** und **t** erfüllen nicht alle Gleichungen, daher gibt es keinen Schnittpunkt! Die Geraden sind zueinander windschief bzw. kreuzend.*

$$g: X = \begin{vmatrix} +6 \\ +6 \\ +1 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ +7 \end{vmatrix}; \quad h: X = \begin{vmatrix} +5 \\ +6 \\ +8 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +3 \\ -4 \\ -6 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && +6 - 1 \cdot s = +5 + 3 \cdot t \\
&\text{II:} && +6 + 0 \cdot s = +6 - 4 \cdot t \\
&\underline{\text{III:}} && \underline{+1 + 7 \cdot s = +8 - 6 \cdot t} \\
&\text{I:} && +12 - 2 \cdot s = +10 + 6 \cdot t \\
&\underline{\text{III:}} && \underline{+1 + 7 \cdot s = +8 - 6 \cdot t} \\
& && +13 + 5 \cdot s = +18 \\
& && +5 \cdot s = +5 \\
& && \underline{\mathbf{s = +1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II:} && +6 + 0 \cdot s = +6 - 4 \cdot t \\
& && +4 \cdot t = 0 \\
& && \underline{\mathbf{t = 0}}
\end{aligned}$$

$$S = \begin{vmatrix} +6 \\ +6 \\ +1 \end{vmatrix} + \mathbf{s} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ +7 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} +6 \\ +6 \\ +1 \end{vmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ +7 \end{vmatrix}$$

<u>S = (+5 / +6 / +8)</u>

$$S = \begin{vmatrix} +5 \\ +6 \\ +8 \end{vmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{vmatrix} +3 \\ -4 \\ -6 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} +5 \\ +6 \\ +8 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} +3 \\ -4 \\ -6 \end{vmatrix};$$

<u>S = (+5 / +6 / +8)</u>

Die Geraden sind zueinander schneidend. **<u>S = (+5 / +6 / +8)</u>**

$$g: X = \begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ +6 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ +2 \\ +4 \end{vmatrix}; \quad h: X = \begin{vmatrix} -2 \\ +6 \\ +9 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ -4 \\ -8 \end{vmatrix};$$

$$\vec{g} = \begin{vmatrix} -2 \\ +2 \\ +4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{vmatrix} +4 \\ -4 \\ -8 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \vec{h} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ +2 \\ +4 \end{vmatrix}$$

Die Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind zueinander proportional. Die Geraden sind zueinander parallel.