Funktionen – Differentialrechnungen

Lösungsblatt 4

*Eine zur y-Achse symmetrische Funktion **4. Grades** hat die Form $f(x): y = a.x^4 + bx^2 + c$.*
Der Graph verläuft durch den Punkt A(0/0) und eine Extremstellen E(+3/+4).
*Wie lautet die Funktionsgleichung f(x)? Berechnen Sie die Koordinaten der anderen Extremstellen und der Nullstellen **N!***

$f(x):\ y = a.x^4 + b.x^2 + c \quad \rightarrow \quad f´(x):\ y´ = 4.a.x^3 + 2.b.x \quad \rightarrow \quad f´´(x):\ y´´ = 12.a.x + 2.b$

Aufstellung der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte: A(0/0) und E(+3/+4)

E: $f(+3) = +4$ I: $y = a.x^4 + b.x^2 + c \rightarrow$ I: $+4 = a.3^4 + b.3^2 + c \rightarrow$ I: $81.a + 9.b + c = +4$

A: $f(0) = 0$ II: $y = a.x^4 + b.x^2 + c \rightarrow$ II: $0 = a.0^4 + b.0^2 + c \rightarrow$ II: $c = 0$

E: $f´(+3) = 0$ III: $y´ = 4.a.x^3 + 2.b.x \rightarrow$ III: $0 = 4.a.3^3 + 2.b.3 \rightarrow$ III: $108.a + 6.b = 0$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{I:} & 81a + 9b & = & +4 & |\,.(-4) \\
\text{III:} & 108a + 6b & = & 0 & |\,.+6 \\
\hline
\text{I:} & -324a - 36b & = & -16 & \\
\text{III:} & +648a + 36b & = & 0 & \\
\hline
\text{I+III:} & +324a & = & -16 & \\
 & a & = & -\frac{16}{324} & \\
 & a & = & -\frac{4}{81}; &
\end{array}
$$

III: $108.a + 6.b = 0$

$108.\left(-\frac{4}{81}\right) + 6.b = 0$

$+6.b = \frac{432}{81} \quad |:6$

$b = \frac{72}{81}; \qquad b = \frac{8}{9};$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x): y = a.x^4 + bx^2 + c$

$$\boldsymbol{f(x): y = -\frac{4}{81}.x^4 + \frac{8}{9}.x^2}$$

*Berechnung der Nullstellen: **N** $\rightarrow$ f(x) = 0*

f(x): $y = -\frac{4}{81}.x^4 + \frac{8}{9}.x^2 \quad |\rightarrow y = 0$

$-\frac{4}{81}.x^4 + \frac{8}{9}.x^2 = 0 \quad |\ .81$

$-4x^4 + 72x^2 = 0 \quad |:(-4)$

$x^2.(+x^2 - 18) = 0$

$x_1 = 0;$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{2.9}; \quad x_{2,3} = \pm 3.\sqrt{2}; \quad x_{2,3} = \pm\ 4{,}25;$ **$N_1 = (0/0)$; $N_{2,3} = (\pm 4{,}25/0)$**

*Berechnung der anderen Extrempunkte: **H, T** $\rightarrow$ f´(x) = 0*

f´(x): $y´ = 4.a.x^3 + 2.b.x$

$4.\left(-\frac{4}{81}\right).x^3 + 2.\left(\frac{8}{9}\right).x = 0$

$x.\left[-\frac{16}{81}.x^2 + \frac{16}{9}\right] = 0$

$x_1 = 0$

$(x_{2,3})^2 = \frac{16}{9}.\frac{81}{16}$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{9}; \quad$ **$x_{2,3} = \pm 3$**

$y_1 = -\frac{4}{81}.(0)^4 + \frac{8}{9}.(0)^2$

$y_1 = 0$

$y_{2,3} = -\frac{4}{81}.(\pm 3)^4 + \frac{8}{9}.(\pm 3)^2$

$y_{2,3} = -\frac{4}{81}.(+81) + \frac{8}{9}.(+9)$

$y_{2,3} = +4$

$H_1 = (+3/+4)$
$H_2 = (-3/+4)$
$T = (0/0)$ = Punkt A