Die Ebene im Raum – Lagebeziehung einer Geraden zu einer Ebene

Lösungsblatt 1

Lagebeziehung zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε:

schneidend → *wenn* $g \cap \varepsilon = \{S\}$; → ***ein Schnittpunkt!***
Wenn der Normalvektor der Ebene ε und der Richtungsvektor der Geraden g einen rechten Winkel bilden, → $\vec{n} \cdot \vec{g} = 0$ → ***liegt g parallel zu ε*** (*X → ist ein Element von g*; *X → ist kein Element von ε*) → ***liegt g in ε*** (*X → ist ein Element von g*; *X → ist ein Element von ε*)

Untersuchen Sie in den folgenden Beispielen die Lage der gegebenen Geraden g und zu einer Ebene! Berechnen Sie auch den Schnittwinkel φ, der vom Normalvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden eingeschlossen wird!

$g: X = \begin{vmatrix} +1 \\ -2 \\ -4 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ +2 \\ +3 \end{vmatrix} \quad \cap \quad \varepsilon: 2x - 4y + z = -3;$

$x = +1 + 4 \cdot t \qquad 2 \cdot (+1 + 4t) - 4 \cdot (-2 + 2t) - 4 + 3t = -3$

$y = -2 + 2 \cdot t \qquad 2 + 8t + 8 - 8t - 4 + 3t = -3$

$z = -4 + 3 \cdot t \qquad 6 + 3t = -3 \rightarrow \underline{t = -3}$

$x = +1 + 4 \cdot (-3); \quad \underline{\rightarrow x = -11}$

$y = -2 + 2 \cdot (-3); \quad \underline{\rightarrow y = -8}$

$z = -4 + 3 \cdot (-3); \quad \underline{\rightarrow z = -13}$

Schnittpunkt: $\underline{\mathbf{S(-11 / -8 / -13)}}$

$\vec{n} = \begin{vmatrix} +2 \\ -4 \\ +1 \end{vmatrix}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \underline{\sqrt{21}}$

$\vec{g} = \begin{vmatrix} +4 \\ +2 \\ +3 \end{vmatrix}; \quad |\vec{g}| = \sqrt{16 + 4 + 9} = \underline{\sqrt{29}}$

$\vec{n} \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} +2 \\ -4 \\ +1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ +2 \\ +3 \end{vmatrix} = (+8 - 8 + 3) = \underline{+3}$

$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{g}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{g}|} \rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{29}};$

$\underline{\varphi = 83°}$

Schnittwinkel = Komplementärwinkel:

$\alpha = 90° - 83° = \underline{7°}$

$g: X = \begin{vmatrix} -4 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +2 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix} \quad \cap \quad \varepsilon: 2x + 4y + 2z = 10;$

$x = -4 + 2 \cdot t \qquad 2 \cdot (-4 + 2t) + 4 \cdot (+2 - 4t) + 2 \cdot 6t = 10$

$y = +2 - 4 \cdot t \qquad -8 + 4t + 8 - 16t + 12t = 10$

$z = 0 + 6 \cdot t \qquad 0 + 0t = 10 \rightarrow 0 = 10; \rightarrow$ f.A.

Schnittpunkt: $\underline{\mathbf{S\{\,\}}}$

Es gibt keinen Schnittpunkt und keinen Schnittwinkel.

$\varepsilon: 2x + 4y + 2z = 10$

$2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 10$

$0 = 10; \rightarrow$ f.A.

Die Gerade <u>liegt parallel zur Ebene</u>, sie <u>liegt</u> aber <u>nicht in der Ebene</u>.

$\cos \varphi = 0; \rightarrow \varphi = 90°; \quad \vec{n} \perp \vec{g};$

$\alpha = 90° - 90° = \underline{\mathbf{0°}}$

$g: X = \begin{vmatrix} +1 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \cap \quad \varepsilon: 6x - 9y + 27z = 42;$

$x = +1 + 3 \cdot t \qquad 6 \cdot (+1 + 3t) - 9 \cdot (-4 + 2t) + 27 \cdot 0 = 42$

$y = -4 + 2 \cdot t \qquad +6 + 18t + 36 - 18t = 42$

$z = 0 + 0 \cdot t \qquad 0t + 42 = 42 \rightarrow \underline{\mathbf{S\{\,\}}}$

Es gibt keinen Schnittpunkt und keinen Schnittwinkel.

$\varepsilon: 6x - 9y + 27z = 42$

$6 \cdot 1 - 9 \cdot (-4) + 27 \cdot 0 = 42$

$42 = 42; \rightarrow$ w.A.

Die Gerade <u>liegt parallel zur Ebene</u>, sie <u>liegt in der Ebene</u>.

$\cos \varphi = 0; \rightarrow \varphi = 90°; \quad \vec{n} \perp \vec{g};$

$\alpha = 90° - 90° = \underline{\mathbf{0°}}$