

Die Ebene im Raum – Lagebeziehung zweier Ebenen

Arbeitsblatt 1

Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$:

Die Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ schneiden einander	Die Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ liegen parallel	Die Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ sind ident
$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = g$	$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{ \}$	$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$
$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind nichtproportional sind nicht parallel zueinander	$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind proportional sind parallel zueinander Jeder beliebige Punkt von $\mathcal{E}_1$ liegt nicht auf $\mathcal{E}_2$	$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind proportional sind parallel zueinander Jeder beliebige Punkt von $\mathcal{E}_1$ liegt auch auf $\mathcal{E}_2$

Untersuchen Sie in den folgenden Beispielen die Lage der gegebenen Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ zueinander und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittwinkel φ , den die beiden Ebene einschließen!

$$\mathcal{E}_1: 2x + 4y + 2z = 10; \quad \mathcal{E}_2: 2x - 4y + 6z = -2$$

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \quad \vec{n}_1 \text{ und } \vec{n}_2 \text{ sind nicht proportional}$$

→ die Ebenen schneiden einander in einer Geraden!

$$\mathcal{E}_1: 2x + 4y + 2z = 10 \rightarrow \text{für } z \text{ wird der Parameter } t$$

$$\mathcal{E}_2: 2x - 4y + 6z = -2 \quad \text{eingesetzt!}$$

$$\text{Schnittgerade } g: X = \begin{pmatrix} +2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ 1 \\ 2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} +2 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} +2 \\ -4 \\ +6 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} +2 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ -4 \\ +6 \end{pmatrix};$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 12) = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|};$$

Da $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, ist der Winkel $\varphi = 90^\circ$

$$\mathcal{E}_1: X = \begin{pmatrix} +1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +3 \\ +11 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_2: -2x + 3y - 9z = +14$$

$$\mathcal{E}_1:$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +3 \\ +11 \\ +3 \end{pmatrix}; \quad n_x = \begin{vmatrix} +2 & +11 \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = (+6 - 0) = +6;$$

$$n_y = - \begin{vmatrix} +3 & +3 \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$n_z = \begin{vmatrix} +3 & +3 \\ +2 & +11 \end{vmatrix} = +27;$$

$$\mathcal{E}_1: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

$$\rightarrow d = +42$$

$$\mathcal{E}_1: 6x - 9y + 27z = +42$$

$$\mathcal{E}_2: -2x + 3y - 9z = +14 \quad \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$$

$$\vec{n}_1 \text{ und } \vec{n}_2 \text{ sind proportional}$$

→ die Ebenen schneiden einander nicht!

$$A(+1/-4/0)$$

$$\mathcal{E}_1: 6x - 9y + 27z = +42$$

$$+6 \cdot 1 - 9 \cdot (-4) + 27 \cdot 0 = +42; \quad \underline{42 = 42}$$

$$\mathcal{E}_2: -2x + 3y - 9z = +14$$

$$\underline{-2 \neq +14}$$

→ der Punkt A liegt nicht auf beiden Ebenen, daher liegen die Ebenen parallel zueinander.