Die Ebene im Raum – Lagebeziehung zweier Ebenen

Lösungsblatt 1

Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen ε_1 und ε_2:

Die Ebenen ε_1 und ε_2 ***schneiden einander***	*Die Ebenen ε_1 und ε_2* ***liegen parallel***	*Die Ebenen ε_1 und ε_2 sind* ***ident***
$\boldsymbol{\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g}$	$\boldsymbol{\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{\ \}}$	$\boldsymbol{\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2}$
$\overrightarrow{\lvert n\rvert}_1$ und $\overrightarrow{\lvert n\rvert}_2$ sind nichtproportional sind nicht parallel zueinander	$\overrightarrow{\lvert n\rvert}_1$ und $\overrightarrow{\lvert n\rvert}_2$ sind proportional sind parallel zueinander	$\overrightarrow{\lvert n\rvert}_1$ und $\overrightarrow{\lvert n\rvert}_2$ sind proportional sind parallel zueinander
	Jeder beliebige Punkt von *ε_1 liegt nicht auf ε_2*	Jeder beliebige Punkt von *ε_1 liegt auch auf ε_2*

Untersuchen Sie in den folgenden Beispielen die Lage der gegebenen Ebenen ε_1 und ε_2 zueinander und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittwinkel φ, den die beiden Ebene einschließen!

ε_1: $2x + 4y + 2z = 10$; ε_2: $2x - 4y + 6z = -2$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ *$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind nicht proportional*

→ die Ebenen schneiden einander in einer Geraden!

ε_1: $2x + 4y + 2z = 10$ *→ für z wird der Parameter t eingesetzt!*

$\underline{\varepsilon_2\text{: } 2x - 4y + 6z = -2}$

I: $2x + 4y + 2t = 10$

$\underline{\text{II: } 2x - 4y + 6t = -2}$

$4x = -8t + 8$

$\underline{x = -2t + 2}$ → I: $2x + 4y + 2t = 10$

$2.(-2t + 2) + 4y + 2t = 10$

$-4t + 4 + 4y + 2t = 10$

$4y = +2t + 6$ → $y = +\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

g: $x = +2 + 2t$

$y = +\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$

$\underline{z = 0 + t}$

$$\underline{\textbf{Schnittgerade g:}}\ \mathbf{X} = \begin{vmatrix} +2 \\ +\frac{3}{2} \\ 0 \end{vmatrix} + \mathbf{t}\,.\begin{vmatrix} +2 \\ +\frac{1}{2} \\ +1 \end{vmatrix}$$

$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix}$; $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} +2 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix}$; $\vec{n}_1 \,.\, \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} +2 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix}$;

$\vec{n}_1 \,.\, \vec{n}_2 = (2\,.\,2 - 4\,.\,4 + 12) = 0$

$\cos\varphi = \frac{\vec{n}1\,.\vec{n}2}{|\vec{n}|1\,.|\vec{n}|2}$;

Da $\underline{\vec{n}_1 \,.\, \vec{n}_2} = 0$, ist der Winkel $\varphi = 90°$

ε_1: $\mathbf{X} = \begin{vmatrix} +1 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix} + \mathbf{s}\,.\begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} + \mathbf{t}\,.\begin{vmatrix} +3 \\ +11 \\ +3 \end{vmatrix}$

$\underline{\varepsilon_2\text{: } -2x + 3y - 9z = +14}$

ε_1:

$\vec{n} = \begin{vmatrix} +3 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +3 \\ +11 \\ +3 \end{vmatrix}$; $n_x = \begin{vmatrix} +2 & +11 \\ & \times \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = (+6 - 0) = +6$;

$n_y = -\begin{vmatrix} +3 & +3 \\ & \times \\ 0 & +3 \end{vmatrix} = -(+9 - 0) = -9$;

$n_z = \begin{vmatrix} +3 & +3 \\ & \times \\ +2 & +11 \end{vmatrix} = (+33 - 6) = +27$;

ε_1: $\mathbf{a}\,.\,x + \mathbf{b}\,.\,y + \mathbf{c}\,.\,z = d$

$+6\,.\,x - 9\,.\,y + 27\,.\,z = d$

$+6\,.\,1 - 9\,.\,(-4) + 27\,.\,0 = d$ → $\underline{d = +42}$

ε_1: $6x - 9y + 27z = +42$

$\underline{\varepsilon_2\text{: } -2x + 3y - 9z = +14}$ $\varepsilon_1 \cap \varepsilon$

$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind proportional

→ die Ebenen schneiden einander nicht!

A(+1/– 4/0)

ε_1: $6x - 9y + 27z = +42$

$+6\,.\,1 - 9\,.\,(-4) + 27\,.\,0 = +42$; $\underline{\underline{\mathbf{42 = 42}}}$

ε_2: $-2x + 3y - 9z = +14$

$-2\,.\,1 + 3\,.\,(-4) + 9\,.\,0 = +14$; $\underline{\mathbf{-2 \neq +14}}$

→ der Punkt A liegt nicht auf beiden Ebenen, daher liegen die Ebenen parallel zueinander.