Funktionen – Extremwertaufgaben

Lösungsblatt 1

Felix möchte mit Hilfe eines 32 m langen Zaun im Garten für seine Hasen ein rechteckiges Gehege abgrenzen, das an der Längsseite an eine Mauer grenzt. Dieses Gehege soll eine möglichst große Fläche haben! Berechnen Sie die Länge und Breite des Geheges!

1. Hauptbedingung: **$A = a \cdot b$** $\rightarrow$ *A soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: **$1 \cdot a + 2 \cdot b = 32$ m** $\rightarrow$ *Da das Gehege mit a an eine Mauer grenzt, nur 1. a!*

$a = 32 - 2 \cdot b$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(b) aus der Haupt- und Nebenbedingung :

$A = a \cdot b$
$A = (32 - 2 \cdot b) \cdot b$

$A = a \cdot b$
$A = 16 \cdot 8 = 128\ m^2$

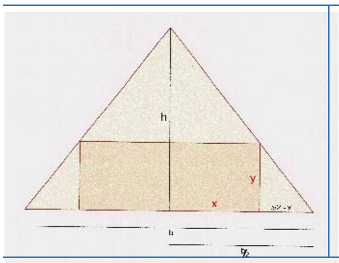
$f(b) = (32 - 2 \cdot b) \cdot b$
$f(b) = 32b - 2b^2$
Extremstelle $\rightarrow f'(b) = 0$

$f'(b) = 32 - 4b$
$32 - 4b = 0$
$4b = 32$
$b = 8$ m

$a = 32 - 2 \cdot b;$
$a = 32 - 2 \cdot 8$
$a = 16$ m

Das Gehege ist 16 m lang und 8 m breit und hat eine Fläche von 128 m².

Ein Dachboden hat eine Giebelhöhe von 6 m und eine Breite von 14,4 m. In diesen Dachboden soll ein quaderförmiger Raum mit möglichst großem Querschnitt und einer Mindesthöhe von 2,40 m eingebaut werden. Berechnen Sie die Breite des Raumes!



1. Hauptbedingung: **$A = 2 \cdot x \cdot y$** $\rightarrow$ *A soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: aus der Ähnlichkeit von Dreiecken:

$$\mathbf{h : \tfrac{b}{2} = y : (\tfrac{b}{2} - x) \quad \rightarrow \quad \tfrac{b}{2} \cdot y = h \cdot (\tfrac{b}{2} - x) \quad \rightarrow \quad y = h \cdot (\tfrac{b}{2} - x) / \tfrac{b}{2}}$$

$$y = \frac{6}{7{,}2} \cdot (7{,}2 - x)$$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(x) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$A = 2 \cdot x \cdot y$
$A = 2 \cdot x \cdot \frac{6}{7{,}2} \cdot (7{,}2 - x)$
.... $\rightarrow$
$A = 2 \cdot x \cdot y$
$A = 2 \cdot 3{,}6 \cdot 3 = 21{,}6\ m^2$

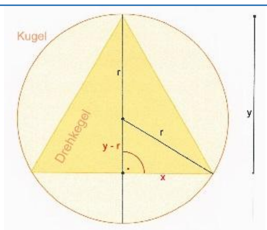
$f(x) = 2 \cdot \frac{6}{7{,}2} \cdot x \cdot (7{,}2 - x)$
***Konstante Summanden** und **Faktoren** können weggelassen werden!*
$f(x) = 7{,}2x - x^2$
Extremstelle $\rightarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = 7{,}2 - 2x$
$7{,}2 - 2x = 0$
$2x = 7{,}2$ m
$x = 3{,}6$ m

$y = \frac{6}{7{,}2} \cdot (7{,}2 - x)$
$y = \frac{6}{7{,}2} \cdot (7{,}2 - 3{,}6)$
$y = 3$ m

Der Querschnitt hat eine Fläche von 21,6 m², die Raumhöhe beträgt 3 m.

Ein Drehkegel mit maximalem Volumen soll in eine Kugel mit einem Radius von 3 m eingeschrieben werden. Berechnen Sie den Radius ($\rightarrow$ x) und die Höhe ($\rightarrow$ y) des Drehkegels!



1. Hauptbedingung: **$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \pi \cdot y$** $\rightarrow$ *V soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: **$(y - r)^2 + x^2 = r^2$** $\rightarrow$ Pythagoreischer Lehrsatz!

$x^2 = r^2 - (y - r)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = r^2 - y^2 - 2ry - r^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = y^2 - 2ry$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(y) aus der Haupt- und Nebenbedingung :

$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \pi \cdot y$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (y^2 - 2 \cdot r \cdot y) \cdot y$

$f(y) = (y^2 - 2 \cdot r \cdot y) \cdot y$
$f(y) = y^3 - 2 \cdot 3 \cdot y^2$
Extremstelle $\rightarrow f'(y) = 0$

$f'(y) = 3y^2 - 12y$
$3y^2 - 12y = 0$
$y \cdot (3y - 12) = 0$
$y_1 = 0;$ $y_2 = 4$ m $= h$

$x^2 = r^2 - (y - r)^2$
$x^2 = 3^2 - (4 - 3)^2$
$x = \sqrt{8};$ **$x = 2{,}82$ m $= r$**
$V = (8 \cdot \pi \cdot 4) : 3 \approx 33{,}5\ m^3$