

Abstandsberechnung – Abstand zwischen einer Geraden und einer Ebene

Arbeitsblatt 1

Der Abstand zwischen einer Geraden g und einer Ebene \mathcal{E} wird mit der Distanzformel $d(g, \mathcal{E}) = | \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0 |$ berechnet.

Erklärung:

P ist ein beliebiger Punkt der Ebene \mathcal{E} , der die Gleichungen der Ebenen erfüllen muss. A ist ein gegebener Punkt der Geraden g . \vec{n}_0 ist der Einheitsvektor des Normalvektors der Ebene.

Berechnen Sie in den folgenden Beispielen den Abstand der Geraden zur Ebene!

$\mathcal{E}: +4x - 2y + 4z = +8; \quad \underline{P(+1/0/+1)};$

$g: X = \begin{pmatrix} +8 \\ -2 \\ +17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix}; \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

$\vec{n} \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (+4 + 0 - 4) = 0; \rightarrow \mathcal{E} \parallel g;$

$\mathcal{E}: +4 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{0} + 4 \cdot \mathbf{1} = +8; \quad \rightarrow +8 = +8$
 $\underline{A(+8/-2/+17)}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} +1 - 8 \\ 0 - (-2) \\ +1 - 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ +2 \\ -16 \end{pmatrix};$

$\vec{n}_0 = \frac{(\vec{n})}{|\vec{n}|}; \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix};$

$\rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6;$

$d(\mathcal{E}, g) = | \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0 |$

$d(\mathcal{E}, g) = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ +2 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix} : 6 \right|$

$d = | (-28 - 4 - 64) : 6 | = \frac{96}{6} = \mathbf{16 \text{ LE}};$

(Längeneinheiten)

$\mathcal{E}: +12x - y + 12z = +24; \quad \underline{P(+1/+0/+1)};$

$g: X = \begin{pmatrix} +8 \\ -1 \\ +18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \mathbf{17 \text{ LE}}; \text{ (Längeneinheiten)}$

$\mathcal{E}: +2x + 4y + 4z = 10; \quad \underline{P(+1/+1/+1)};$

$g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ +6 \end{pmatrix}$

$= \mathbf{1\frac{2}{3} \text{ LE}}; \text{ (Längeneinheiten)}$