Abstandsberechnung – Abstand zwischen einer Geraden und einer Ebene

Lösungsblatt 1

Der Abstand zwischen einer Geraden ***g*** *und einer Ebene* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *wird mit der Distanzformel* $\mathbf{d(g,\varepsilon) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|}$ *berechnet.*

Erklärung:

P ist ein beliebiger Punkt der Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$*, der die Gleichungen der Ebenen erfüllen muss. A ist ein gegebener Punkt der Geraden* ***g****.* $\vec{n}_0$ *ist der Einheitsvektor des Normalvektors der Ebene.*

Berechnen Sie in den folgenden Beispielen den Abstand der Geraden zur Ebene!

$\varepsilon: +4x - 2y + 4z = +8;$ $\quad$ P(+ 1/ 0/+ 1);

$$g: X = \begin{vmatrix} +8 \\ -2 \\ +17 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{vmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{vmatrix}; \qquad \vec{g} = \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n} \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = (+4 + 0 - 4) = 0; \rightarrow \varepsilon \parallel g;$$

$$\varepsilon: +4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = +8; \qquad \rightarrow +8 = +8$$

A(+ 8/– 2/+ 17)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} +1-8 \\ 0-(-2) \\ +1-17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 \\ +2 \\ -16 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n}_0 = \frac{(\vec{n})}{|\vec{n}|}; \rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{vmatrix};$$

$$\rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6;$$

$$d(\varepsilon,g) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|$$

$$d(\varepsilon,g) = \left| \begin{vmatrix} -7 \\ +2 \\ -16 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ -2 \\ +4 \end{vmatrix} : 6 \right|$$

$$d = |(-28 - 4 - 64) : 6| = \frac{96}{6} = \mathbf{16 \ LE};$$

(Längeneinheiten)

$\varepsilon: +12x - y + 12z = +24;$ $\quad$ P(+ 1/ +0 / + 1);

$$g: X = \begin{vmatrix} +8 \\ -1 \\ +18 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{vmatrix} +12 \\ -1 \\ +12 \end{vmatrix}; \qquad \vec{g} = \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n} \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} +12 \\ -1 \\ +12 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = (+12 + 0 - 12) = 0; \rightarrow \varepsilon \parallel g;$$

$$\varepsilon: +12 \cdot 1 - 1 \cdot 12 + 12 \cdot 1 = +12; \rightarrow +12 = +12$$

A(+ 8/– 1/+ 18)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} +1-8 \\ +0-(-1) \\ +1-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 \\ +1 \\ -17 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n}_0 = \frac{(\vec{n})}{|\vec{n}|}; \rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} +12 \\ -1 \\ +12 \end{vmatrix};$$

$$\rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{144 + 1 + 144} = \sqrt{289} = 17;$$

$$d(\varepsilon,g) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|$$

$$d(\varepsilon,g) = \left| \begin{vmatrix} -7 \\ +1 \\ -17 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +12 \\ -1 \\ +12 \end{vmatrix} : 17 \right| \rightarrow d = \left| \frac{-84 - 1 - 204}{17} \right|;$$

$$d(\varepsilon,g) = \frac{289}{17} = \mathbf{17 \ LE};$$ *(Längeneinheiten)*

$\varepsilon: +2x + 4y + 4z = 10;$ $\quad$ P(+ 1/ +1/+ 1);

$$g: X = \begin{vmatrix} -4 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix}; \qquad \vec{g} = \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n} \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \\ +6 \end{vmatrix} = (-4 - 16 + 24) = 0; \rightarrow \varepsilon \parallel g;$$

$$\varepsilon: +2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = +10; \rightarrow +10 = +10$$

A(– 4/+ 2/ 0)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} +1-(-4) \\ +1-2 \\ +1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +5 \\ -1 \\ +1 \end{vmatrix};$$

$$\vec{n}_0 = \frac{(\vec{n})}{|\vec{n}|}; \rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix};$$

$$\rightarrow |\vec{n}|_2 = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6;$$

$$d(\varepsilon,g) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|$$

$$d(\varepsilon,g) = \left| \begin{vmatrix} +5 \\ -1 \\ +1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +2 \\ +4 \\ +4 \end{vmatrix} : 6 \right|$$

$$d = |(+10 - 4 + 4) : 6| = \frac{10}{6} = \mathbf{1\tfrac{2}{3} \ LE};$$ *(Längeneinheiten)*