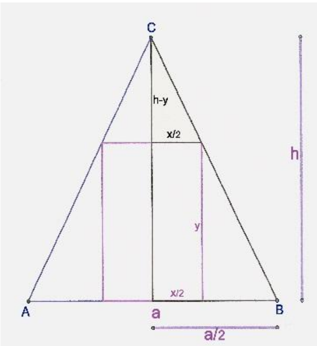
Funktionen – Extremwertaufgaben

Lösungsblatt 4

Ein gleichschenkeliges Dreieck hat die Abmessungen a= 8 m, h = 12 m. Diesem Dreieck soll das flächengrößte Rechteck eingeschrieben werden. (Eine Recheckseite liegt in der Basis a!) Zu berechnen sind: die Seiten und der Flächeninhalt des eingeschriebenen Rechtecks!



$f(y) = \frac{2}{3} \cdot (12 - y) \cdot y$

***Konstante Summanden** und **Faktoren** können weggelassen werden!*

1. Hauptbedingung: $\mathbf{A = x \cdot y}$ → *A soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: aus der Ähnlichkeit von Dreiecken:

$$\mathbf{h : \frac{a}{2} = (h-y) : \frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\frac{a}{2} \cdot (h-y) = h \cdot \frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{4 \cdot (12-y) = 12 \cdot \frac{x}{2}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{4 \cdot (12-y) = 6 \cdot x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{6} \cdot (12 - y)$$

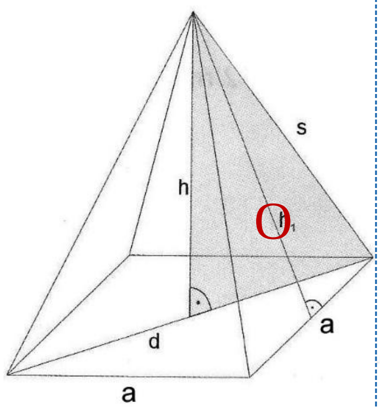
3. Erstellung einer Zielfunktion f(y) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$$A = x \cdot y \quad \rightarrow \quad A = \frac{4}{6} \cdot (12 - y) \cdot y; \quad \rightarrow \quad A = \frac{2}{3} \cdot (12 - y) \cdot y$$

$f(y) = 12y - y^2$ Extremstelle → $f\,'(y) = 0$ $f\,'(y) = 12 - 2y$ $12 - 2y = 0$ $2y = 12$ $\underline{y = 6\text{ m}}$	$x = \frac{2}{3} \cdot (12 - y)$ $x = \frac{2}{3} \cdot (12 - 6)$ $\underline{x = 4\text{ m}}$	$A = x \cdot y$ $A = 4 \cdot 6$ $\underline{A = 24\text{ m}^2}$

Das Rechteck hat eine Fläche von 24 m², die Seite sind 4 m und 6 m lang.

Max und Moritz wollen aus 4 Stangen mit einer Länge von 4 m ein pyramidenförmiges Zelt mit einer quadratischen Grundfläche und einem maximalen Volumen bauen. Wie lange müssen die Seiten der Grundfläche sein? Berechnen Sie auch die Höhe und das Volumen der Zeltes! Wie viel m² Zeltplane sind für diese Zelt (Boden und Mantel)erforderlich?



1. Hauptbedingung: $\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h}$ → *V soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: Pythagoreischer Lehrsatz

$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = a^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 2 \cdot a^2 \quad \rightarrow \quad d = a \cdot \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 \quad \rightarrow \quad h^2 + \frac{a^2}{2} = s^2 \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{2} = s^2 - h^2 \quad \rightarrow$$

$$a^2 = \underline{(s^2 - h^2) \cdot 2}$$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(h) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot \underline{(s^2 - h^2) \cdot 2 \cdot h}}$$

$f(h) = \frac{2}{3} \cdot \underline{(s^2 - h^2) \cdot h}$ $f(h) = \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot h - h^3$ $f\,'(h) = 16 - 3 \cdot h^2$ $3 \cdot h^2 = 16;\ h = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{ m} \approx \underline{2{,}3\text{ m}}$	$a^2 = (s^2 - h^2) \cdot 2$ $a^2 = [16 - \frac{16}{3}] \cdot 2$ $a^2 = \frac{64}{3}$ $a = \frac{8}{\sqrt{3}}\text{ m} \approx \underline{4{,}61\text{ m}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$ $V = \frac{256}{9 \cdot \sqrt{3}}$ $\underline{V = 16{,}42\text{ m}^3}$	*Pythagoras!* $h_1^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $h_1^2 = 16 - 5{,}31$ $\underline{h_1 = 3{,}27\text{ m}}$

$$O = a^2 + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot h_1 \quad \rightarrow \quad O = 4{,}61^2 + 4 \cdot \frac{4{,}61}{2} \cdot 3{,}27 \quad \rightarrow \quad O = 21{,}2521 + 30{,}1494 \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{O \approx 51{,}40\text{ m}^2}}$$