

Gleichungen – Schnitt- und Berührungsaufgaben

Lösungsblatt 2

Berührungsbedingungen (BB) für Kegelschnitte in 1. Hauptlage:

Ellipse: $d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2$

Hyperbel: $d^2 = a^2 \cdot k^2 - b^2$

Parabel: $p = 2 \cdot k \cdot d$

Spaltform der Tangentengleichungen für Kegelschnitte in 1. Hauptlage:

Ellipse:

$t_{\text{ell}}: b^2 \cdot x \cdot x_T + a^2 \cdot y \cdot y_T = a^2 \cdot b^2$

Hyperbel:

$t_{\text{hyp}}: b^2 \cdot x \cdot x_T - a^2 \cdot y \cdot y_T = a^2 \cdot b^2$

Parabel:

$t_{\text{par}}: y y_T = p \cdot (x + x_T)$

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P(18/-9)$ an die Ellipse $\text{ell}: x^2 + 2y^2 = 54$ gelegt werden können? $t_{\text{ell}}: y = k \cdot x + d$

BB: $d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2$;

$$x^2 + 2y^2 = 54 \rightarrow \frac{x^2}{54} + \frac{2y^2}{54} = 1$$

$$a^2 = 54; b^2 = 27;$$

$$t_{\text{ell}}: y = k \cdot x + d \rightarrow P(18/-9); P \in t$$

$$-9 = k \cdot 18 + d \rightarrow d = -18 \cdot k - 9$$

$$d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2$$

$$(-18 \cdot k - 9)^2 = 54 \cdot k^2 + 27$$

$$324k^2 + 324k + 81 = 54k^2 + 27$$

$$270k^2 + 324k + 54 = 0 \quad | :27$$

$$10k^2 + 12k + 2 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$k_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2}}{2 \cdot 10}$$

$$k_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{20} \quad k_{1,2} = \frac{-12 \pm 8}{20}$$

$$\| k_1 = -0,2; \quad k_2 = -1;$$

$\|$

$$\| d = -18 \cdot k - 9$$

$$\| d_1 = (-18) \cdot (-0,2) - 9; \rightarrow d_1 = -5,4$$

$$\| d_2 = (-18) \cdot (-1) - 9; \rightarrow d_2 = +9$$

$$t_{\text{ell}}: (\text{vom Punkt } P) \quad y = k \cdot x + d: \quad t_{\text{ell}}: y = -0,2x - 5,4$$

$$t_{\text{ell}}: y = -x + 9$$

Berechnung der Koordinaten der Berührungspunkte T_1 und T_2

$$\text{ell}: x^2 + 2y^2 = 54 \cap t_{\text{ell}}: y = -0,2x - 5,4$$

$$x = -5y - 27$$

$$(-5y - 27)^2 + 2y^2 = 54$$

$$25y^2 + 270y + 729 + 2y^2 = 54$$

$$27y^2 + 270y + 675 = 0$$

$$y^2 + 10y + 25 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$y_{1,2} = \frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 25}$$

$$y = -5$$

$$x = -5y - 27$$

$$x = -2$$

$$T_1 = (-2/-5)$$

$$\text{ell}: x^2 + 2y^2 = 54 \cap t_{\text{ell}}: y = -x + 9$$

$$x = -y + 9$$

$$(-y + 9)^2 + 2y^2 = 54$$

$$y^2 - 18y + 81 + 2y^2 = 54$$

$$3y^2 - 18y + 27 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$y_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9}$$

$$y = +3$$

$$x = -y + 9$$

$$x = +6$$

$$T_2 = (+6/+3)$$